CAPES : 2005-2006

Géométrie Affine Euclidienne

1. On considère $ST = \{$isométries du plan qui transforment toute droite en une droite parallèle$\}$. On note s_C la symétrie centrale par rapport à C.
   a) Montrer que ST est un sous groupe du groupe des isométries du plan.
   b) Montrer que si $\varphi \in ST$ a deux points fixes alors φ est l'identité.
   c) Montrer que si $\varphi \in ST \setminus \{Id.\}$ a un point fixe alors φ est une symètrie centrale.
   d) Soient $\varphi \in ST$ et $A \in \mathcal{P}$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{P}$ tel que $\varphi = s_B$ ou $\varphi = s_B s_A$. (Aide : B milieu $[A,\varphi(A)]$).
   e) Montrer que $ST = S \cup T$ où $S = \{$symétries centrales$\}$; $T = \{$composées de 2 symétries centrales$\}$.
   f) Montrer que $T = \{$translations$\}$.
   g) Montrer que pour $s \in S$ et $t \in T$ on a $sts = t^{-1}$.
   h) Montrer que ST est un sous groupe normal du groupe des isométries du plan.
   i) Montrer que T est l'unique sous groupe d'indice 2 de ST.
2. Soit D une droite du plan $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D^{\perp}}$. Calculer $t_{\overrightarrow{u}} \circ Ref_D$ et $Ref_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$ (où Ref_D est la réflexion par rapport à D).
3. Déterminer la composée des symétries centrales par rapport aux milieux des 3 cotés d'un triangle.
4. Dans le plan : Soient D_1,D_2,D_3 trois droites distinctes $s_i = Ref_{D_i}$ $(i = 1,2,3)$. Montrer que D_1,D_2,D_3 sont concourrantes ou parallèles ssi $(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^2 = id.$ (1)
   Aide : i) Si $D_1 \parallel D_2$, considérer $\overrightarrow{u}$ tel que $D_2 = t_{\overrightarrow{u}}(D_1)$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{D_1}$ puis décomposer $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ où $v \in \overrightarrow{D_3}, \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{D_3^{\alpha}}$. Montrer que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$ et conclure $D_3 \parallel D_1$.
   ii) Si $D_1 \nparallel D_2 \{A\} = D_1 \cap D_2$ $\quad \alpha = \sphericalangle(D_1,D_2)$ $\quad s_2 \circ s_1 = Rot_{A,2\alpha}$ $\quad s_1 \circ s_2 = Rot_{A,-2\alpha}$ Montrer que (1) $\rightarrow s_3(A)$ est fixe pour $Rot_{A,-2\alpha}$ et conclure
   iii) Réciproquement montrer que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{A\} \rightarrow (1)$
5. ABC un triangle équilatéral direct de plan. On note R_1,R_2,R_3 les rotations respectives de centre A,B,C d'angle $\pi/3$. Déterminer $R_3 \circ R_2 \circ R_1$.
6. Soit ABC un triangle ni isocèle ni rectangle. A l'aide de triangles congrus à ABC on pave le plan en juxtaposant deux triangles de façon à former un parallélogramme. Détrminer le groupe des isométries laissant invariant ce pavage.
7. Rappel f une isométrie du plan affine euclidien est un antidéplacement si $det(\overrightarrow{f}) = -1$. Montrer que les antidéplacements sont exactement les composées $t_{\overrightarrow{u}} \circ Ref_D$. Où D est une droite affine et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$.
8. On considère un parallélogramme $ABCD$ sur lequel sont construits deux triangles semblables BCP et DQC $(\widehat{BPC} = \widehat{DCQ}; \widehat{CBP} = \widehat{QDC}; \widehat{PCB} = \widehat{CQD})$
   a) Montrer que $\frac{DQ}{DA} = \frac{BA}{BP}$. En déduire que les triangles ADQ et PBA sont semblalbles puis que $\frac{AQ}{AP} = \frac{BC}{BP}$.
   b) Montrer que Q est l'image de P par la similitude directe de centre A d'angle $\widehat{PBC}$ et de rapport $\frac{BC}{BP}$.
   c) Retrouver le résultat $b)$ en utilisant les complexes.

9. Former l'équation cartésienne du lieu d'un point M de E_3 tel que les projections orthogonales de M sur les trois plans de coordonnées et sur le plan d'équation $x+y+z=1$ soient coplanaires.
10. Soient C et C' deux cercles, $M \in C, M' \in C'$. T(resp T') la tangente en M (resp.M') à C (resp. C'). Déterminer le lieu du milieu I de MM' sachant que $T \perp T'$.
11. a) Montrer que pour tout plan P et tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}^{\perp}$ $t_{\overrightarrow{v}} \circ Ref_P$ est une réflexion.
    b) Montrer que les antidéplacements de E_3 sont 1) les symétries glissées, 2) les composées d'une rotation et d'une réflexion , l'axe de la rotation étant orthogonal au plan de la réflexion.
12. Soit E un espace affine euclidien et soit $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$une base orthonorméede $\overrightarrow{E}$. On définit comme suit une partie G de $L(\overrightarrow{E})$: f est un élément de G s'il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ et une suite $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ telles que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \epsilon_i \in \{1, -1\} \text{ et } f(e_i) = \epsilon_i e_{\sigma(i)}$$

    a) Montrer que G est un groupe. Quel est son ordre?
    b) Montrer que si $n=3$, G est isomorphe au groupe des isométries d'un cube.
13. Soit V un espace vectoriel euclidien.
    a) Montrer qu'une symétrie s de V est un automorphisme orthogonal si et seulement si pour tout $x \in V$, $||s(x)|| = ||x||$ (donc ssi s est une symétrie orthogonale).
    b) Montrer qu'une projection p de V est une projection orthogonale si et seulement si, pour tout x de V, $||p(x)|| \leq ||x||$.

Dans la suite le plan (l'espace) est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (resp. $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$)

14. Soient ABC un triangle équilatéral et M un point à l'intérieur de ABC. Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés de ABC ne dépend pas de M.
15. Déterminer le sous-groupe de $GA(E_2)$ (i.e. le groupe des isométries d'un espace affine euclidien de dimension 2) laissant globalement invariant
    a) un rectangle (non carré)
    b) un carré
    c) un triangle équilatéral
    d) la réunion de deux droites parallèles
16. D, Δ des droites de E_2 d'équation $(x+y+1=0)$ et $(x-y-1=0)$. Préciser
    a) l'expression analytique de la réflexion S_D, d'axe D.
    b) l'expression analytique de la réflexion S_δ d'axeΔ
    c) l'expression analytique de $S_D \circ S_\Delta$. Caractériser cette transformation et expliquer.
17. ABC un triangle équilatéral direct de E_2. On note R_1, R_2, R_3 les rotations respectives de centre A, B, C d'angle $\pi/3$. Déterminer $R_3 \circ R_2 \circ R_1$.
18. A et B deux points distincts de E_2. A tout point M de E_2, on associe le point M' tel que

$$\begin{cases} BM' = AM \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

    1. Déterminer l'application r qui transforme M en M'
    2. Soit D une droite passant par A. On pose $D' = r(D)$ et $D \cap D' = \{I\}$

Démontrer que quand M décrit D'

a) le cercle $(MM'I)$

b) le milieu J de $[MM']$ est sur une droite fixe

19. Reconnaître les applications f dont les expressions analytiques sont

$$a)\left\{\begin{array}{lll} x' & = & Y+3 \\ y' & = & x-2 \\ z' & = & -z \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{lll} x' & = & y \\ y' & = & z-1 \\ z' & = & -x+1 \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{lll} z' & = & z+1 \\ y' & = & x-1 \\ z' & = & y+2 \end{array}\right. \quad d)\left\{\begin{array}{lll} x' & = & \frac{1}{3}(-2x-y+2z)+1 \\ y' & = & \frac{1}{3}(2x-2y+z)+1 \\ z' & = & \frac{1}{3}(x+2y+2z)+3 \end{array}\right.$$

20. Former l'équation cartésienne du lieu d'un point M de E_3 tel que le symétrique M' de M par rapport au plan $(P) : x+y-2z+1=0$ définisse, avec les points $A(1{,}2,-1)$,$B(-1{,}2{,}3)$ un triangle équilatéral.
21. Soient C,C' deux cercles, $M \in C$,$M' \in C'$,T (resp. T') la tangente en M (resp. M') à C (resp. C"). Déterminer le lieu du milieu I de MM' sachant $T \perp T'$.
22. Déterminer le lieu d'un point M de E_2 pour que les symétriques de M par rapport aux quatre côtés d'un rectangle donné soient cocycliques.
23. ABC un triangle équilatéral de côté a

a) Contruire $G = \frac{2A+B+C}{4}$

b) Déterminer $E_1 = \{M \in E | 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2\}$

c) Déterminer $E_2 = \{M \in E | 2MA^2 + MA.MB + MA.MC = \frac{3}{2}a^2\}$

24. Soit ABC un triangle, $A' \in (BC)$,$B' \in (CA)$,$C' \in (AB)$ distincts des sommets

a) Montrer que (AA'),(BB'),(CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

(Théorème de Céva).

b) Si A',B',C' sont des points de contacts respectifs du cercle inscrit dans ABC. Montrer que les droites (A,A'),(B,B'),(C,C') sont concourantes.